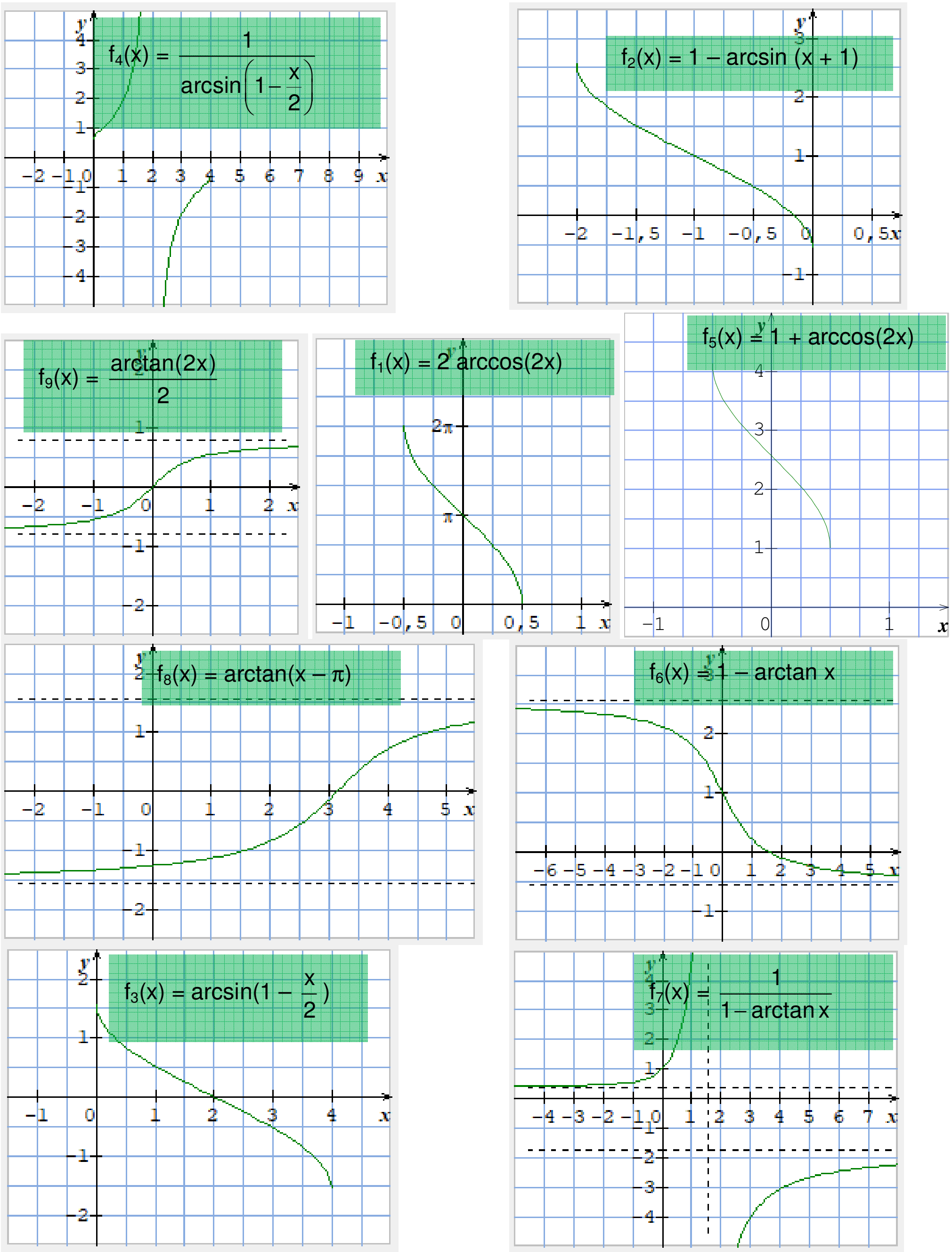
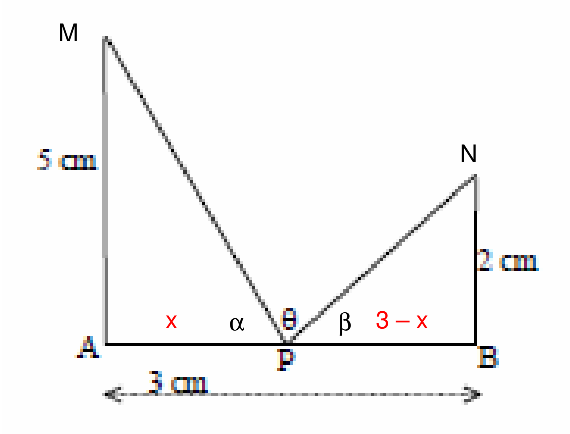
Solution de l'exercice 7



9. Problèmes

a) Dans le schéma ci-contre, où faut-il situer le point P (sur la droite AB) pour que l'angle θ soit maximum ?



Choix de l'inconnue : x la distance |AP|

Dans le triangle MAP, $\tan\alpha = \frac{5}{x}$ Dans le triangle NBP, $\tan\beta = \frac{2}{3-x}$

$\alpha = \arctan\frac{5}{x}$ $\beta = \arctan\frac{2}{3-x}$

Or, $\theta = \pi - (\alpha + \beta) = \pi - \left(\arctan\frac{5}{x} + \arctan\frac{2}{3-x}\right)$

D'où, $\theta' = \frac{-\left(\frac{5}{x}\right)'}{1+\left(\frac{5}{x}\right)^2} + \frac{-\left(\frac{2}{3-x}\right)'}{1+\left(\frac{2}{3-x}\right)^2} = \frac{\frac{5}{x^2}}{1+\left(\frac{5}{x}\right)^2} + \frac{\frac{-2}{(3-x)^2}}{1+\left(\frac{2}{3-x}\right)^2}$

$= \frac{5}{x^2.\left(1+\frac{25}{x^2}\right)} - \frac{2}{(3-x)^2.\left(1+\frac{4}{x^2-6x+9}\right)}$

On a un extremum lorsque la dérivée première s'annule.

$\theta' = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{x^2.\left(1+\frac{25}{x^2}\right)} = \frac{2}{(3-x)^2.\left(1+\frac{4}{x^2-6x+9}\right)}$

$\Leftrightarrow 5.(3-x)^2.\left(1+\frac{4}{x^2-6x+9}\right) = 2.x^2.\left(1+\frac{25}{x^2}\right)$

$\Leftrightarrow 5.(3-x)^2.\left(\frac{x^2-6x+9+4}{x^2-6x+9}\right) = 2.x^2.\left(\frac{x^2+25}{x^2}\right)$

$\Leftrightarrow 5.(x^2-6x+9+4) = 2.(x^2+25)$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{10-\sqrt{80}}{2}$ ou $x = \dfrac{10+\sqrt{80}}{2}$

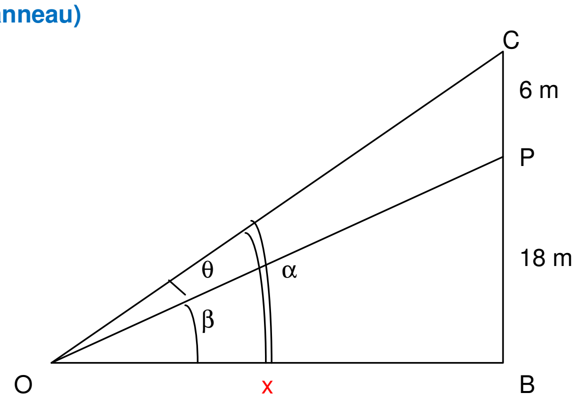
$\Leftrightarrow x \cong 0{,}528$ ou $x \cong 9{,}472$

Seule la première solution convient pour notre problème.

On peut vérifier qu'on a un maximum, lorsque x augment, l'angle θ augmente d'abord avant de diminuer.

L'angle θ est donc maximum lorsque P est situé à 0,528 cm du point A.

b) Un panneau publicitaire de 6 m de haut est placé sur le toit d'un building et son bord inférieur est ainsi 18 m plus haut que les yeux d'un observateur. A quelle distance doit se mettre cet observateur juste en dessous de l'enseigne pour que son angle de vue θ entre le bord inférieur et le bord supérieur de l'enseigne soit le plus grand possible ? (A cet angle correspond la meilleure vue du panneau)



Choix de l'inconnue : x la distance de l'observateur au pied du building.

Dans le triangle OBC, $\tan\alpha = \dfrac{24}{x}$; $\alpha = \arctan\dfrac{24}{x}$

Dans le triangle OBP, $\tan\beta = \dfrac{18}{x}$; $\beta = \arctan\dfrac{18}{x}$

Or, $\theta = \alpha - \beta = \arctan\dfrac{24}{x} - \arctan\dfrac{18}{x}$

D'où, $\theta' = \dfrac{\left(\dfrac{24}{x}\right)'}{1+\left(\dfrac{24}{x}\right)^2} - \dfrac{\left(\dfrac{18}{x^2}\right)'}{1+\left(\dfrac{18}{x^2}\right)^2} = \dfrac{-\dfrac{24}{x^2}}{1+\left(\dfrac{24}{x}\right)^2} - \dfrac{\dfrac{-18}{x^2}}{1+\left(\dfrac{18}{x}\right)^2}$

$$= \frac{-24}{x^2.\left(1+\frac{24^2}{x^2}\right)} + \frac{18}{x^2.\left(1+\frac{18^2}{x^2}\right)}$$

On a un extremum lorsque la dérivée première s'annule.

$$\theta' = 0 \Leftrightarrow \frac{24}{x^2.\left(1+\frac{24^2}{x^2}\right)} = \frac{18}{x^2.\left(1+\frac{18^2}{x^2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow 24.x^2.\left(1+\frac{18^2}{x^2}\right) = 18.x^2.\left(1+\frac{24^2}{x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 24.x^2.\left(\frac{x^2+18^2}{x^2}\right) = 18.x^2.\left(\frac{x^2+24^2}{x^2}\right)$$

$\Leftrightarrow 24 . (x^2 + 18^2) = 18 . (x^2 + 24^2)$

$\Leftrightarrow 24x^2 + 24 . 18^2 = 18x^2 + 18 . 24^2$

$\Leftrightarrow 6x^2 = 24 . 18 . 6$

$\Leftrightarrow x^2 = 432$

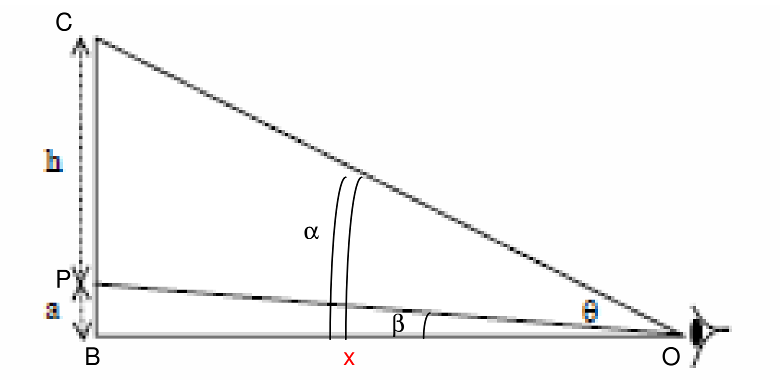
$\Leftrightarrow x \cong 20{,}785$ ou $x \cong -20{,}785$

Seule la première solution convient pour notre problème.

On peut vérifier qu'on a un maximum, lorsque x augment, l'angle θ augmente d'abord avant de diminuer.

L'angle θ est donc maximum lorsque l'observateur est situé à 20,785 m du pied du building.

c) Un tableau de hauteur h est exposé dans une galerie d'art et le bord inférieur du cadre est à une hauteur a au-dessus du niveau de l'œil du visiteur (voir figure). A quelle distance le visiteur doit-il se tenir pour avoir la meilleure vue ? (Autre formulation : où doit-on se mettre pour que l'angle d'ouverture θ soit le plus grand possible ?)



Choix de l'inconnue : x la distance de l'observateur au pied du mur.

Dans le triangle OBC, $\tan\alpha = \frac{a+h}{x}$ Dans le triangle OBP, $\tan\beta = \frac{a}{x}$

$\alpha = \arctan\frac{a+h}{x}$ $\beta = \arctan\frac{a}{x}$

Or, $\theta = \alpha - \beta = \arctan\frac{a+h}{x} - \arctan\frac{a}{x}$

D'où, $\theta' = \frac{\left(\frac{a+h}{x}\right)'}{1+\left(\frac{a+h}{x}\right)^2} - \frac{\left(\frac{a}{x^2}\right)'}{1+\left(\frac{a}{x^2}\right)^2} = \frac{-\frac{a+h}{x^2}}{1+\left(\frac{a+h}{x}\right)^2} - \frac{\frac{-a}{x^2}}{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2}$

$= \frac{-(a+h)}{x^2.\left(1+\frac{(a+h)^2}{x^2}\right)} + \frac{a}{x^2.\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)}$

On a un extremum lorsque la dérivée première s'annule.

$\theta' = 0 \Leftrightarrow \frac{a+h}{x^2.\left(1+\frac{(a+h)^2}{x^2}\right)} = \frac{a}{x^2.\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)}$

$\Leftrightarrow (a+h).x^2.\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right) = a.x^2.\left(1+\frac{(a+h)^2}{x^2}\right)$

$\Leftrightarrow (a+h).x^2.\left(\frac{x^2+a^2}{x^2}\right) = a.x^2.\left(\frac{x^2+(a+h)^2}{x^2}\right)$

$\Leftrightarrow (a + h) . (x^2 + a^2) = a . (x^2 + (a + h)^2)$

$\Leftrightarrow (a + h) . x^2 + (a + h) . a^2 = a . x^2 + a . (a + h)^2$

$\Leftrightarrow (a + h) . x^2 - a . x^2 = a . (a + h)^2 - (a + h) . a^2$

$\Leftrightarrow h . x^2 = a . (a + h) . [(a + h) - a]$

$\Leftrightarrow h . x^2 = a . (a + h) . h$

$\Leftrightarrow x^2 = a . (a + h)$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{a.(a+h)}$ ou $x = -\sqrt{a.(a+h)}$

Seule la première solution convient pour notre problème.

On peut vérifier qu'on a un maximum, lorsque x augment, l'angle θ augmente d'abord avant de diminuer.

L'angle θ est donc maximum lorsque l'observateur est situé à $\sqrt{a.(a+h)}$ unités du pied du mur.